Diophantische vergelijkingen in het kerstpakket

Benne de Weger

b.m.m.d.weger@tue.nl

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven

versie 1.0, 13 december 2010

1 De TU/e viert een feestje met getaltheorie in het kerstpakket

Afgelopen week werden wij weer verblijd door het immer zeer gewaardeerde kerstpakket van de TU/e. De verrassing was dit jaar voor mij extra groot: *er bleken drie diophantische vergelijkingen in te zitten!* Omdat u dit wellicht niet zal zijn opgevallen, leg ik het graag uit.

In het pakket zat een krantje, de "Good Morning", dat ondanks de Engelse titel geheel in het Nederlands is geschreven. Op de achterpagina staat een rubriek "Wist u dat?", met daarin enkele eigenschappen van de getallen 55 en 1956. Dit omdat de TU/e in 1956 is opgericht en volgend jaar dus 55 jaar bestaat. Van het getal 55 werden (naast enkele oninteressante weetjes) de volgende eigenschappen genoemd:

- 55 is het 10e Fibonacci-getal,
- 55 is de som van de eerste 10 gehele getallen,
- 55 is de som van de eerste 5 kwadraten.

Als wiskundige met een achtergrond in de getaltheorie vraag je je dan ogenblikkelijk af hoe bijzonder combinaties van deze eigenschappen zijn. Zijn er meer Fibonacci-getallen die de som van de eerste zoveel gehele getallen zijn? Zijn er meer Fibonacci-getallen die de som van de eerste zoveel kwadraten zijn? Zijn er meer getallen die de som van de eerste zoveel gehele getallen zijn en tegelijk de som van de eerste zoveel kwadraten? Zijn er meer getallen die alle drie de eigenschappen hebben? Deze prangende vragen worden hieronder beantwoord. De conclusie zal zijn dat dit de laatste keer is dat de TU/e een verjaardagsfeestje op deze manier kan vieren. Maar als we de eisen minder hoog stellen en de Fibonacci-getallen buiten beschouwing laten, dan kunnen we nog uitkijken naar interessante gebeurtenissen in de jaren 2067 (91 jaar TU/e) en 210291 (208335 jaar TU/e). Maar dan is het ook echt afgelopen.

2 De drie Diophantische vergelijkingen

We formuleren nu de drie Diophantische vergelijkingen en de stellingen die we daarover zullen bewijzen. Allereerst wat notatie en twee formules die tot uw basiskennis zouden moeten behoren.

- De *Fibonacci-getallen* F_m zijn voor $m = 0, 1, 2, \ldots$ gedefinieerd door $F_0 = 0, F_1 = 1$, en $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ voor alle $m \geq 2$. Dus ieder Fibonacci-getal vanaf de tweede is de som van zijn twee voorgangers. De rij wordt zo: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$.
- De som van de eerste n gehele getallen wordt gegeven door $\frac{1}{2}n(n+1)$.
- De som van de eerste k kwadraten wordt gegeven door $\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$.

Dan formuleren we nu drie Diophantische vergelijkingen (d.w.z. vergelijkingen waarvan we de oplossingen uitsluitend in de gehele getallen zoeken) die optreden in de in hoofdstuk 1 gestelde vragen. Dat doen we meteen in stellingen die de volledige sets oplossingen ervan geven.

Stelling 1 *De diophantische vergelijking*

(1) $\quad F_m = \frac{1}{2}n(n+1)$

heeft uitsluitend de volgende oplossingen in positieve gehele getallen m, n*:*

m	n	$F_m = \frac{1}{2}n(n+1)$
1, 2	1	1
4	2	3
8	6	21
10	10	55

We wisten al dat $m = 10, n = 10$ een oplossing is, want $F_{10} = \frac{1}{2} \times 10 \times (10+1) = 55$. Kennelijk is dit de grootste oplossing.

Stelling 2 *De diophantische vergelijking*

(2) $\quad F_m = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

heeft uitsluitend de volgende oplossingen in positieve gehele getallen m, k*:*

m	k	$F_m = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
1, 2	1	1
5	2	5
10	5	55

We wisten al dat $m = 10, k = 5$ een oplossing is, want $F_{10} = \frac{1}{6} \times 5 \times (5+1) \times (2 \times 5 + 1) = 55$. Kennelijk is dit hier ook de grootste oplossing.

Stelling 3 *De diophantische vergelijking*

$$(3) \quad \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

heeft uitsluitend de volgende oplossingen in positieve gehele getallen n, k*:*

n	k	$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
1	1	1
10	5	55
13	6	91
645	85	208335

We wisten al dat $n = 10, k = 5$ een oplossing is, want $\frac{1}{2} \times 10 \times (10+1) = \frac{1}{6} \times 5 \times (5+1) \times (2 \times 5+1) = 55$. Kennelijk is dit deze keer *niet* de grootste oplossing, en zoals we al zagen geeft dat nog enige hoop voor de toekomst van de TU/e.

3 Bewijzen

Het is een goed gebruik in de wiskunde stellingen te bewijzen. Want waarom zou u mij geloven op mijn blauwe ogen? Nu kan ik me er hier redelijk makkelijk van afmaken, in één geval omdat het bewijs al in de literatuur te vinden is, en in de andere twee gevallen omdat er software is die het bewijs bijna volautomatisch levert.

Overigens zal ik het u niet euvel duiden als u hier langzaamaan begint af te haken.

Bewijs van Stelling 1. Dit resultaat werd in 1989 bewezen door Luo Ming [M]. Q.E.D.

Het bewijs van Luo Ming is elementair, in de zin dat er geen diepe wiskunde wordt gebruikt. Dat wil nog niet zeggen dat het bewijs erg makkelijk is, dat is het niet. Ik geef daarom een ander bewijs, dat niet elementair is, maar waar ik de moeilijkheden kan verstoppen in een aanroep van de juiste software. Dat laatste is ook de aanpak die ik voor het bewijzen van de stellingen 2 en 3 hanteer. Van deze twee kon ik geen bewijs in de literatuur vinden.

De bedoelde software is het computer-algebra-pakket *Magma*. Ik gebruikte de online *Magma Calculator* [MC]. Daarin opgenomen is de zogenaamde methode van “lineaire vormen in elliptische logarithmen”, waarmee zogeheten elliptische diophantische vergelijkingen kunnen worden opgelost. Tot die categorie behoren diophantische vergelijkingen van de vorm $y^2 = f(x)$, waarbij f een derde- of vierdegraads polynoom is met gehele coëfficiënten.

In het geval van vergelijking (3) is het evident dat een derdegraads elliptische vergelijking een cruciale rol speelt. Maar voor de vergelijkingen (1) en (2) ligt dat minder voor de hand. Om te laten zien dat deze gevallen toch tot een elliptische vergelijking leiden, gebruik ik hier een bekende eigenschap van Fibonacci-getallen, die ze verbindt aan hun zusjes, de *Lucas-getallen*.

We definiëren de Lucas-getallen L_m door $L_0 = 2, L_1 = 1$, en $L_m = L_{m-1} + L_{m-2}$ voor alle $m \geq 2$. Dus net als bij Fibonacci-getallen is ieder Lucas-getal vanaf de tweede de som van zijn twee voorgangers, maar beginnen we anders. De rij Lucas-getallen is: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$. Nu blijkt te gelden (en dat kunt ook u makkelijk aantonen) dat

(4) $\quad L_m^2 - 5F_m^2 = (-1)^m \times 4 \quad$ voor alle $m \geq 0$.

Dit zullen we in onderstaande bewijzen gebruiken om elliptische vergelijkingen af te leiden.

Op de, bepaald niet elementaire, theorie van lineaire vormen in elliptische logarithmen kan ik hier verder niet ingaan. Zie [ST] voor het derdegraads geval, en [T] voor het vierdegraads geval. De Magma-software lost elliptische vergelijkingen op op basis van deze theorie. Ik wijs erop dat de aanname achter onderstaande bewijzen is dat de Magma-software correct is.

Alternatief bewijs van Stelling 1. We passen de volgende substitutie toe: $x = 2n + 1$, $y = 8L_m$. Dan zijn x, y ook positieve gehele getallen, en volgens (4) en (1) geldt nu

$$
\begin{aligned}
y^2 &= 64L_m^2 \\
&= 320F_m^2 + (-1)^m 256 \\
&= 320\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + (-1)^m 256 \\
&= 5(2n)^2(2n+1)^2 + (-1)^m 256 \\
&= 5x^4 - 10x^2 + 5 + (-1)^m 256.
\end{aligned}
$$

De elliptische vergelijking $y^2 = 5x^4 - 10x^2 + 261$ kunnen we nu oplossen via [MC] door middel van het Magma-commando

```
IntegralQuarticPoints([5,0,-10,0,261]);.
```

De oplossingen met positieve x, y zijn $(x, y) = (1, 16)$, $(3, 24)$, $(5, 56)$, $(13, 376)$, $(21, 984)$. We selecteren de oplossingen met $y = 8L_m$ en $x > 1$, dan houden we over:

x	y	$n = \frac{1}{2}(x-1)$	$L_m = \frac{1}{8}y$	m
3	24	1	3	2
5	56	2	7	4
13	376	6	47	8
21	984	10	123	10

De elliptische vergelijking $y^2 = 5x^4 - 10x^2 - 251$ kunnen we nu oplossen via [MC] door middel van het Magma-commando

```
IntegralQuarticPoints([5,0,-10,0,-251]);.
```

De enige oplossing met positieve x, y is $(x, y) = (3, 8)$. Deze geeft:

x	y	$n = \frac{1}{2}(x-1)$	$L_m = \frac{1}{8}y$	m
3	8	1	1	1

Dit completeert het bewijs. Q.E.D.

Bewijs van Stelling 2. We passen de volgende substitutie toe: $x = 5(2k+1)^2$, $y = 120L_m$. Dan zijn x, y ook positieve gehele getallen, en volgens (4) en (2) geldt nu

$$\begin{aligned} y^2 &= 14400L_m^2 \\ &= 72000F_m^2 + (-1)^m 57600 \\ &= 72000\left(\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right)^2 + (-1)^m 57600 \\ &= 125(2k)^2(2k+2)^2(2k+1)^2 + (-1)^m 57600 \\ &= x^3 - 10x^2 + 25x + (-1)^m 57600. \end{aligned}$$

De elliptische vergelijking $y^2 = x^3 - 10x^2 + 25x + 57600$ kunnen we nu oplossen via [MC] door middel van het Magma-commando

```
IntegralPoints(EllipticCurve([0,-10,0,25,57600]));.
```

De oplossingen met positieve y zijn $(x, y) = (-35, 40)$, $(-31, 132)$, $(-19, 216)$, $(0, 240)$, $(5, 240)$, $(16, 244)$, $(25, 260)$, $(45, 360)$, $(65, 540)$, $(89, 828)$, $(109, 1112)$, $(185, 2460)$, $(320, 5640)$, $(385, 7460)$, $(605, 14760)$, $(901, 26896)$, $(1925, 84240)$, $(3105, 1727401)$, $(9221, 884976)$. We selecteren de oplossingen met $y = 120L_m$ en $x > 5$ gelijk aan 5 maal een oneven kwadraat, we houden over:

x	y	$k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{5}x} - 1\right)$	$L_m = \frac{1}{120}y$	m
45	360	1	3	2
605	14760	5	123	10

De elliptische vergelijking $y^2 = x^3 - 10x^2 + 25x - 57600$ kunnen we nu oplossen via [MC] door middel van het Magma-commando

```
IntegralPoints(EllipticCurve([0,-10,0,25,-57600]));.
```

De oplossingen met positieve y zijn $(x, y) = (45, 120)$, $(65, 420)$, $(125, 1320)$, $(164, 2022)$, $(629, 15648)$, $(661, 16864)$, $(1030976, 1046816904)$. We selecteren de oplossingen met $y = 120L_m$ en $x > 5$ gelijk aan 5 maal een oneven kwadraat, dan houden we over:

x	y	$k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{5}x} - 1\right)$	$L_m = \frac{1}{120}y$	m
45	120	1	1	1
125	1320	2	11	5

Dit completeert het bewijs. Q.E.D.

Bewijs van Stelling 3. We passen de volgende substitutie toe: $x = 3(2k+1)$, $y = 9(2n+1)$. Dan zijn x, y ook positieve gehele getallen, en volgens (4) en (3) geldt nu

$$
\begin{aligned}
y^2 &= 81(2n+1)^2 \\
&= 648 \times \frac{1}{2}n(n+1) + 81 \\
&= 648 \times \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + 81 \\
&= 27 \times (2k)(2k+2)(2k+1) + 81 \\
&= (x-3)(x+3)x + 81 \\
&= x^3 - 9x + 81.
\end{aligned}
$$

De elliptische vergelijking $y^2 = x^3 - 9x + 81$ kunnen we nu oplossen via [MC] door middel van het Magma-commando

```
IntegralPoints(EllipticCurve([-9,81]));.
```

De oplossingen met positieve y zijn $(x, y) = (-5, 1)$, $(-3, 9)$, $(0, 9)$, $(3, 9)$, $(7, 19)$, $(9, 27)$, $(24, 117)$, $(33, 189)$, $(39, 243)$, $(513, 11619)$, $(1099, 36433)$, $(5112, 365499)$. We selecteren de oplossingen met y een oneven 9-voud en x een positief oneven 3-voud, dan houden we over:

x	y	$k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$	$m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}y - 1\right)$
9	27	1	1
33	189	5	10
39	243	6	13
513	11619	85	645

Dit completeert het bewijs. Q.E.D.

De conclusie mag zijn dat computer-algebra een krachtig hulpmiddel kan zijn bij het genieten van het kerstpakket.

Referenties

[M] Luo Ming, "On Triangular Fibonacci Numbers", *The Fibonacci Quarterly* 27(2) [1989], 98–108, http://www.fq.math.ca/Scanned/27-2/ming.pdf,

[MC] "Magma Calculator", http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/.

[ST] R.J. Stroeker, N. Tzanakis, "Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms", *Acta Arithmetica* 67 [1994], 177–196.

[T] N. Tzanakis, "Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms, the quartic case", *Acta Arithmetica* 75 [1996], 165–190.